

Magnetics 4 Freaks: Alles rund um den Elektromagnetismus WS25/26



Bitte



Danke!

Willkommen an der
Reinhold-Würth-
Hochschule in
Künzelsau

Die Kolloquiumsreihe
von Institut
und Industrie

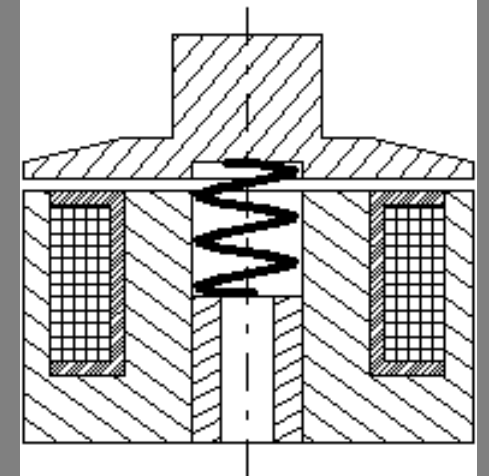


Foto: Wilhelm Feucht

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Ulm
Institut für schnelle mechatronische Systeme (ISM)
Institut für Digitalisierung und elektrische Antriebe (IDA)

Programm Wintersemester 2025/26:

Mittwoch, 05. November 2025

16.30 bis 18.00 Uhr

Mathematische Grundlagen, Maxwellgleichungen, magnetisches und permanentmagnetisches. Geklärt wird zudem die Frage:
„Was haben ein Festtagsbraten und ein Elektromagnet gemeinsam?“



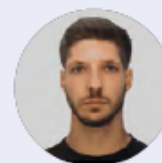
Prof. Dr.-Ing. Jürgen Ulm
Hochschule Heilbronn, Campus Künzelsau,
Reinhold-Würth-Hochschule

Schwerpunktgebiet in der Theorie der elektromagnetischen Felder und der elektromagneto-mechanischen Wandler im Master-schwerpunkt Elektromagnetische Systeme (EMS).

Mittwoch, 12. November 2025

16.30 bis 18.00 Uhr

Optimierungsworkflow mit Motor-CAD und optiSLang



Florian Servas
Studium der Elektrotechnik Campus Künzelsau,
Reinhold-Würth-Hochschule

Im Rahmen seiner Bachelorarbeit beschäftigte er sich mit der Motoroptimierung und der Konzeptentwicklung für Hocheffizienzmotoren bei der ZIEHL-ABEGG SE. Aktuell führt er sein Elektrotechnikstudium im Master fort.

Mittwoch, 17. Dezember 2025

16.30 bis 18.00 Uhr

Einführung in die Variationsrechnung – wie lösen wir das 17.30 Uhr-Problem?



Prof. Dr.-Ing. Jürgen Ulm
Hochschule Heilbronn, Campus Künzelsau,
Reinhold-Würth-Hochschule

Schwerpunktgebiet in der Theorie der elektromagnetischen Felder und der elektromagneto-mechanischen Wandler im Master-schwerpunkt Elektromagnetische Systeme (EMS).

Mittwoch, 07. Januar 2026

16.30 bis 18.00 Uhr

Fortsetzung Variationsmethode – mit mathematischer Beschleunigung



Prof. Dr.-Ing. Jürgen Ulm
Hochschule Heilbronn, Campus Künzelsau,
Reinhold-Würth-Hochschule

Schwerpunktgebiet in der Theorie der elektromagnetischen Felder und der elektromagneto-mechanischen Wandler im Master-schwerpunkt Elektromagnetische Systeme (EMS).

Campus:

IDA -News

INSTITUT FÜR DIGITALISIERUNG UND ELEKTRISCHE ANTRIEBE

Neuer IDA-Infotag am 03.03.26; 16:00 Uhr – save the date

- Derzeitiger Jahresbericht erhältlich unter <https://www.hs-heilbronn.de/ida>

Unter Federführung von Institutsassistentin



Dr. Anna Konyev
Telefon: +49 7940 1306 163
E-Mail: anna.konyev@hs-heilbronn.de
Büroadresse: C207
Postadresse: Daimlerstr. 22, 74653 Künzelsau



Veranstaltungen: Ilmenauer Magnettag

Save the Date - **IMT 2026** – 9. Ilmenauer Magnettag

wir freuen uns sehr, Ihnen mitteilen zu können, dass der **9. Ilmenauer Magnettag** am **18. März 2026** in Ilmenau stattfinden wird. Er wird durch das **Fachgebiet Mechatronik der Technischen Universität Ilmenau** veranstaltet.

Der Ilmenauer Magnettag ist eine der führenden Fachtagung für angewandte Forschung und Entwicklung im Bereich elektromagnetischer Antriebssysteme und bringt Forscher, Entwickler, Prüfungsspezialisten sowie Anwender aus der Industrie zusammen.

In diesem Jahr findet die Veranstaltung in **Kooperation mit Prof. Dr. Jürgen Ulm (Hochschule Heilbronn - Campus Künzelsau - Reinhold-Würth-Hochschule)** statt.

Darüber hinaus ist am Vortag, dem **17. März 2026**, ein **Magnetik Grundlagen Workshop** geplant, der eine ideale Grundlage für die anschließende Fachtagung bietet.

Bitte merken Sie sich diese Termine vor. Weitere Informationen, einschließlich Agenda und Anmeldung, folgen in Kürze.

Wir freuen uns darauf, Sie in Ilmenau begrüßen zu dürfen!

Veranstaltungen: Workshop Elektrische Maschinen

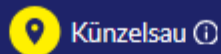
Workshop Elektrische Maschinen

Theoretische Grundlagen und Laborübungen am Prüfplatz für elektrische Maschinen

Beginn:
16.07.2026 - 09:00 Uhr

Ende:
17.07.2026 - 15:00 Uhr

Dauer:
2,0 Tage



Veranstaltungsnr.: 35695.00.005

Leitung

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Ulm

Hochschule Heilbronn

Alle Referent:innen

Inhouse anfragen

Inhaltsverzeichnis

1. Historie zur Variationsrechnung
2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung
3. Mathematische Ableitungsakrobatik
4. Euler-Lagrange-Gleichung
5. Anwendungsbeispiele

Inhaltsverzeichnis

- 1. Historie zur Variationsrechnung**
2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung
3. Mathematische Ableitungsakrobatik
4. Euler-Lagrange-Gleichung
5. Anwendungsbeispiele

1. Historie zur Variationsrechnung

- **1687:** Newton veröffentlichte sein Werk „*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*“ - Die mathematischen Grundlagen der Naturphilosophie, was die erste Literatur zur klassischen Mechanik war, in welcher er seine drei Grundgesetze der Bewegung vorstellte.
- **1696:** Die Gebrüder Jakob und Johann Bernoulli erarbeitete die Lösung der Brachistochrone (griechisch *brachistos* für kürzeste, *chronos* für Zeit), was als Geburtstag der Variationsrechnung gilt.



Sir Isaac Newton (1643-1727)



Jacob Bernoulli (1655-1705)



Johann Bernoulli (1667-1748)

Bild: <https://en.wikipedia.org>

1. Historie zur Variationsrechnung

- **1743:** D'Alembertsche Prinzip, auch bekannt als Lagrange-d'Alembert-Prinzip, ist ein grundlegendes Konzept der klassischen Mechanik, das eine alternative Formulierung des zweiten Newtonschen Bewegungsgesetzes darstellt. Es besagt, dass für ein System von Teilchen die Summe der ausgeübten Kräfte und der Trägheitskräfte für jede virtuelle Verschiebung gleich Null ist. Einfacher ausgedrückt ermöglicht es uns, dynamische Probleme durch die Einführung von Trägheitskräften als statische Gleichgewichtsprobleme zu behandeln. Er arbeitete auch an Variationsansätze, welche später in das Prinzip der kleinsten Wirkung eingingen.
- **1756:** Euler veröffentlichte sein Buch „*Introduction to the Analysis of the Variable Quantities*“, mit Inhalt seiner Arbeiten zur Variationsrechnung. Euler führte das Variationsproblem auf Differenzialgleichungen zurück.



Jean le Rond d'Alembert
(1717-1783)



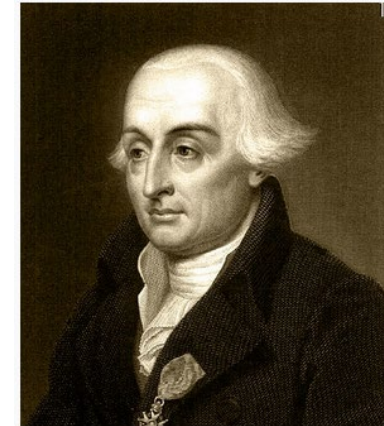
Leonhard Euler
(1707-1783)

Bild: <https://en.wikipedia.org>

1. Historie zur Variationsrechnung

- **1788:** Lagrange veröffentlichte sein Buch „*Mechanique Analytique*“, was sein Hauptwerk zur klassischen Mechanik wurde. Es systematisiert die analytische Mechanik mittels Variablen- und Potenzreihen, liefert Formulierungen mit Lagrange-Operationen, überführt Mechanik von geometrischer zu rein analytischer Beschreibung und führt Konzepte wie Generalisierte Koordinaten, D'Alembert-Formulierungen, Euler-Lagrange-Gleichungen, Hamiltonsche Formalismen und Reduktion von Kräften ein. Es verbindet Kräfte, Bewegungen und Energie durch eine einheitliche, algorithmenorientierte Darstellung.
- **1834:** Sir William Hamilton veröffentlichte sein Buch „*On a General Method in Dynamics*“ (auch bekannt als „*On Dynamical Theory of Rigid Bodies*“). Inhaltlich führt es die Quaternionen-Formalismen in die Mechanik ein und entwickelt Konzepte wie Impulserhaltung, Dynamik starrer Körper und die Beziehung von Kräften, Bewegungen sowie Drehmomente. Es legt eine generelle, algebraisch-operatorische Methode zur Behandlung dynamischer Systeme nahe, die später als Hamiltonsche Dynamik bzw. Hamilton-Formalismus bekannt wurde.

Bild: <https://en.wikipedia.org>



Joseph-Louis Lagrange
(1736-1813)



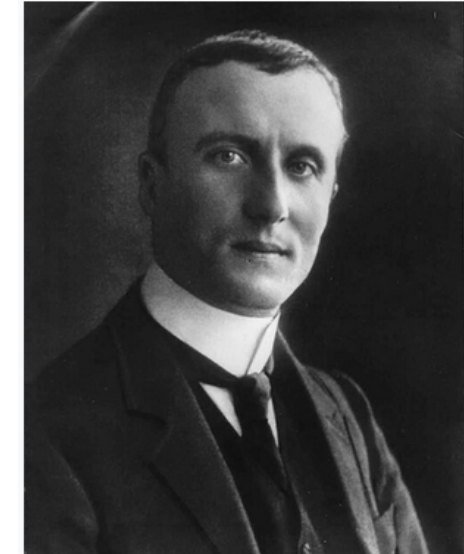
William Hamilton
(1634-1694)

1. Historie zur Variationsrechnung

- **1909:** Carathéodory veröffentlichte Arbeiten zur Variationsrechnung, welche anschließend die Grundlagen für formale Bearbeitung bildeten.

„Vor nahezu hundert Jahren hat Jacobi die Entdeckung gemacht, daß die Differentialgleichungen, die in der Variationsrechnung vorkommen, und die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung miteinander verknüpft sind und daß insbesondere jeder derartigen partiellen Differentialgleichung Variationsprobleme zugeordnet werden können.“

(C. Carathéodory, 1935)



Constantin Carathe'odory
(1873-1950)
Griechischer Mathematiker

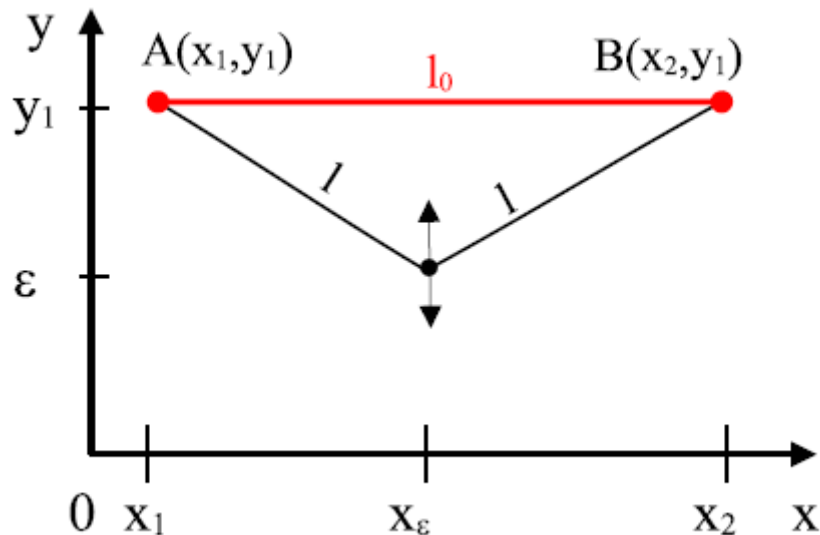
Bild: <https://en.wikipedia.org>

Inhaltsverzeichnis

1. Historie zur Variationsrechnung
- 2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung**
3. Mathematische Ableitungsakrobatik
4. Euler-Lagrange-Gleichung
5. Anwendungsbeispiele

2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung

Das 17:30 Uhr-Problem - Geodäte



$$\begin{aligned}
 L &= l + l \\
 &= \sqrt{(x_\epsilon - x_1)^2 + (y_1 - \epsilon)^2} + \sqrt{(x_2 - x_\epsilon)^2 + (y_1 - \epsilon)^2} \\
 &= \sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - \epsilon}{x_\epsilon - x_1}\right)^2} (x_\epsilon - x_1) + \sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - \epsilon}{x_2 - x_\epsilon}\right)^2} (x_2 - x_\epsilon).
 \end{aligned}$$

Mit

$$(x_\epsilon - x_1) = (x_2 - x_\epsilon).$$

Folgt

$$L = 2 (x_2 - x_\epsilon) \sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - \epsilon}{(x_2 - x_\epsilon)}\right)^2} = \text{Extrem} = \text{Minimum}.$$

Durch Ableiten

$$\frac{dL}{d\epsilon} = \frac{2 (x_2 - x_\epsilon) (y_1 - \epsilon)}{(x_2 - x_\epsilon)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - \epsilon}{(x_2 - x_\epsilon)}\right)^2}} = 0$$

und

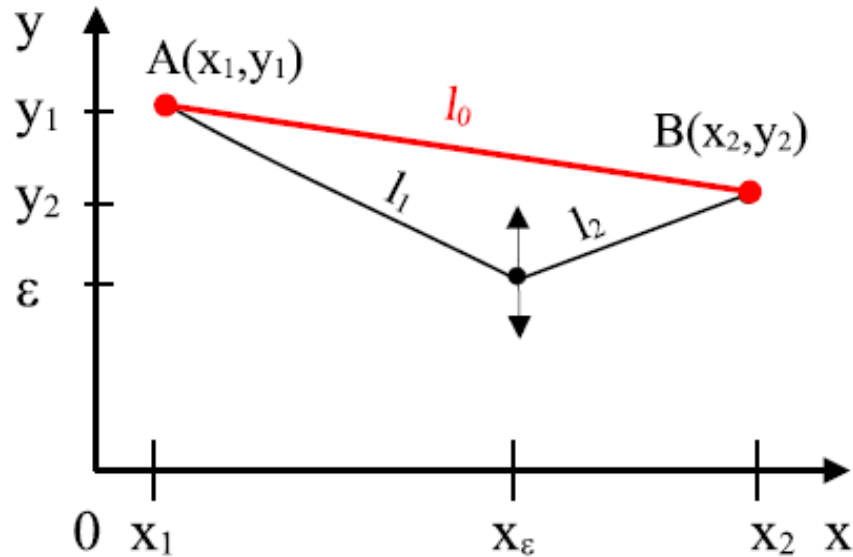
$$\epsilon = y_1$$

geht L in das Extremal l_0 über.

Damit ist die gerade Linie die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten A und B.

2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung

Das 17:30 Uhr-Problem - Geodäte



$$\begin{aligned}
 l &= l_1 + l_2 \\
 &= \sqrt{(x_\epsilon - x_1)^2 + (y_1 - \epsilon)^2} + \sqrt{(x_2 - x_\epsilon)^2 + (y_2 - \epsilon)^2} \\
 &= \sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - \epsilon}{x_\epsilon - x_1}\right)^2} (x_\epsilon - x_1) + \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - \epsilon}{x_2 - x_\epsilon}\right)^2} (x_\epsilon - x_2) \\
 &= \text{Extremum} = \text{Minimum}.
 \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
 \frac{dl}{d\epsilon} &= 0 \\
 &= \frac{y_1 - \epsilon}{(x_1 - x_\epsilon) \sqrt{\left(\frac{\epsilon - y_1}{x_1 - x_\epsilon}\right)^2 + 1}} + \frac{y_2 - \epsilon}{(x_2 - x_\epsilon) \sqrt{\left(\frac{\epsilon - y_2}{x_2 - x_\epsilon}\right)^2 + 1}}.
 \end{aligned}$$

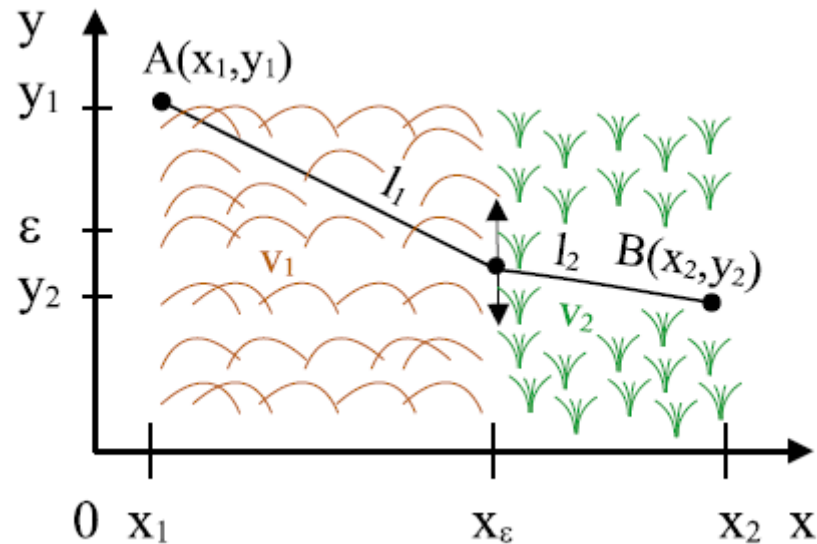
und Umstellen nach ϵ folgt

$$\epsilon = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_\epsilon (y_1 - y_2)}{x_1 - x_2},$$

und erlaubt das Auffinden der Extremale, bei welcher die Summe der beiden Pfadlängen l_1 und l_2 in die Länge der Extremale l_0 übergeht.

2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung

Das 17:30 Uhr-Problem - Brachistochrone



$$t = t_1 + t_2$$

$$= \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2},$$

$$l_1 = \sqrt{(x_\epsilon - x_1)^2 + (y_1 - \epsilon)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - \epsilon}{x_\epsilon - x_1}\right)^2} (x_\epsilon - x_1)$$

$$l_2 = \sqrt{(x_2 - x_\epsilon)^2 + (\epsilon - y_2)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon - y_2}{x_2 - x_\epsilon}\right)^2} (x_2 - x_\epsilon)$$

Das Funktional t

$$t = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - \epsilon}{x_\epsilon - x_1}\right)^2} (x_\epsilon - x_1)}{v_1} + \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon - y_2}{x_2 - x_\epsilon}\right)^2} (x_2 - x_\epsilon)}{v_2}$$

$$= \text{Extremum} = \text{Minimum.}$$

wird durch Ableiten

$$\frac{dt}{d\epsilon} = 0$$

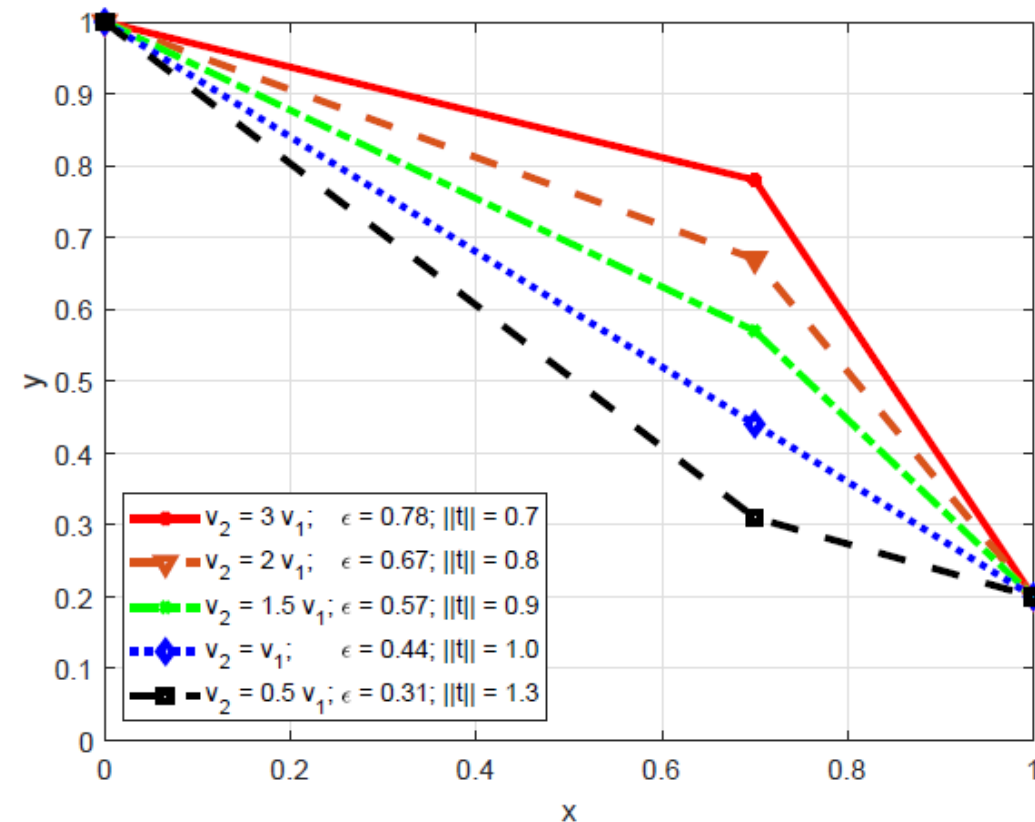
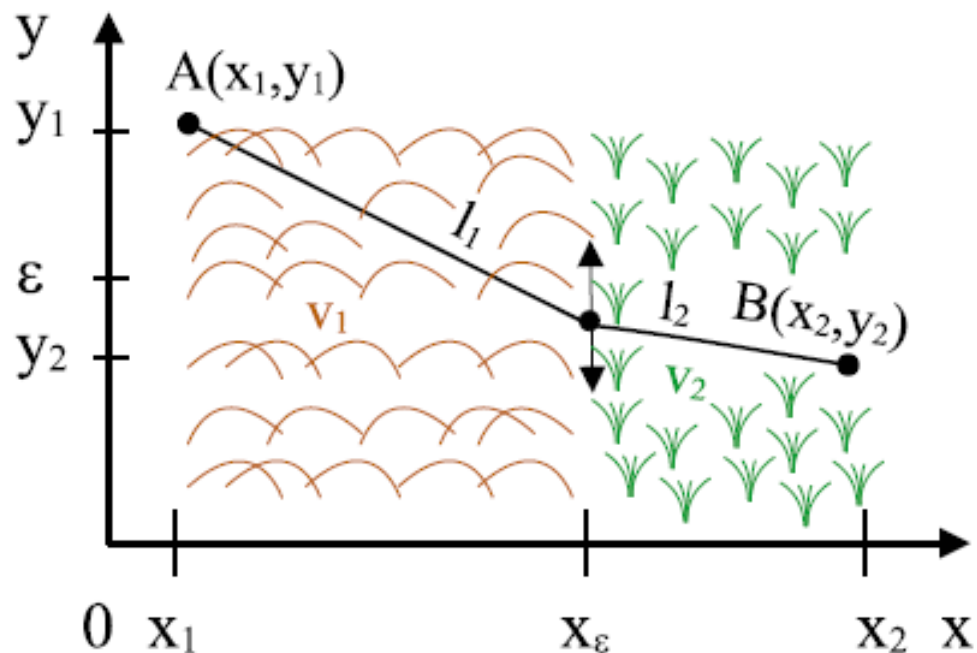
$$= \frac{1}{v_1} \frac{y_1 - \epsilon}{(x_1 - x_\epsilon) \sqrt{\left(\frac{\epsilon - y_1}{x_1 - x_\epsilon}\right)^2 + 1}} + \frac{1}{v_2} \frac{\epsilon - y_2}{(x_2 - x_\epsilon) \sqrt{\left(\frac{\epsilon - y_2}{x_2 - x_\epsilon}\right)^2 + 1}}.$$

und Suche nach ϵ stationär.

2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung

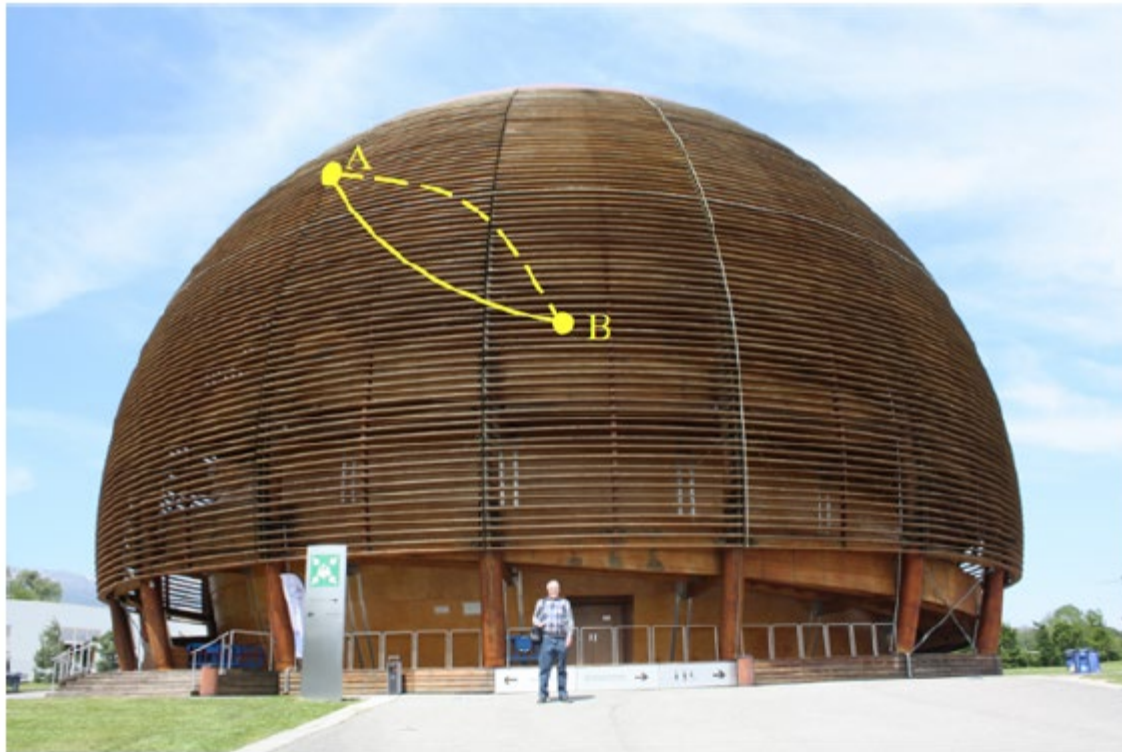
Das 17:30 Uhr-Problem - Brachistochrone

Lösung:



2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung

Historische Fragestellungen - Geodäte



$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\
 ds &= F(y') dx = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx \\
 &= \sqrt{1 + y'^2} dx; \quad I = \int_A^B ds \\
 I &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx; \quad [m]
 \end{aligned}$$

2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung

Historische Fragestellungen - Katenoid



$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\
 ds &= \sqrt{1 + y'^2} \, dx \\
 I &= g \rho A \int_A^B y \, ds; [J] \\
 &= g \rho A \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx \\
 &= g \rho A \int_{x_1}^{x_2} F(y, y') \, dx
 \end{aligned}$$

2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung

Historische Fragestellungen – Minimale Fläche

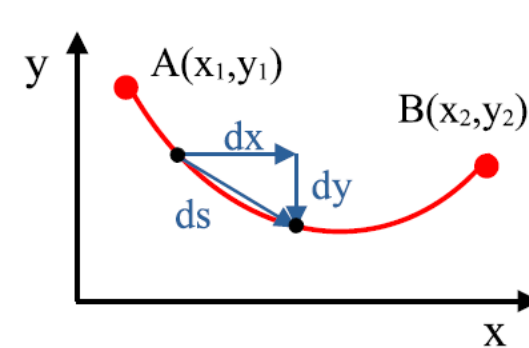


$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\
 ds &= \sqrt{1 + y'^2} \, dx \\
 I &= \int_A^B 2 \pi y \, ds; \, [m^2] \\
 &= 2 \pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx \\
 &= 2 \pi \int_{x_1}^{x_2} F(y, y') \, dx
 \end{aligned}$$

2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung

Historische Fragestellungen – Brachistochrone





$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\
 ds &= \sqrt{1 + y'^2} \, dx \\
 I &= \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y') \, dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} \, dx
 \end{aligned}$$

Gegenüberstellung gezeigter Funktionale:

$$I[y'] = K_1 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \, dx \quad (I)$$

$$I[y, y'] = K_2 \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx \quad (II)$$

$$I[y, y'] = K_3 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} \, dx \quad (III)$$

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\
 ds &= \sqrt{1 + y'^2} \, dx \quad (IV)
 \end{aligned}$$

Inhaltsverzeichnis

1. Historie zur Variationsrechnung
2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung
- 3. Mathematische Ableitungsakrobatik**
4. Euler-Lagrange-Gleichung
5. Anwendungsbeispiele

3. Mathematische Ableitungsakrobatik: Kettenregel - Differenziationsregeln für Multivariable Funktionen

- Kettenregel für eine unabhängige Variable: Mit der geschachtelten Funktion $z = f(x) = f(g(t))$ und $x = g(t)$ folgt in der Lagrange'schen Notation

Geschachtelte Funktionen in der Leibniz-Notation

$$z = f(x) = f(g(t)) \text{ und } x = g(t)$$

$$\underbrace{\frac{df}{dt}}_{f'(t)} = \underbrace{\frac{df}{dg}}_{f'(g)} \underbrace{\frac{dg}{dt}}_{g'(t)}.$$

$$x = g(t), y = h(t) \text{ und } z = f(x, y) = f(g(t), h(t))$$

$$\underbrace{\frac{df}{dt}}_{f'(t)} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f'(x)} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{x'} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f'(y)} \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{y'}.$$

Geschachtelte Funktionen in der Lagrange-Notation

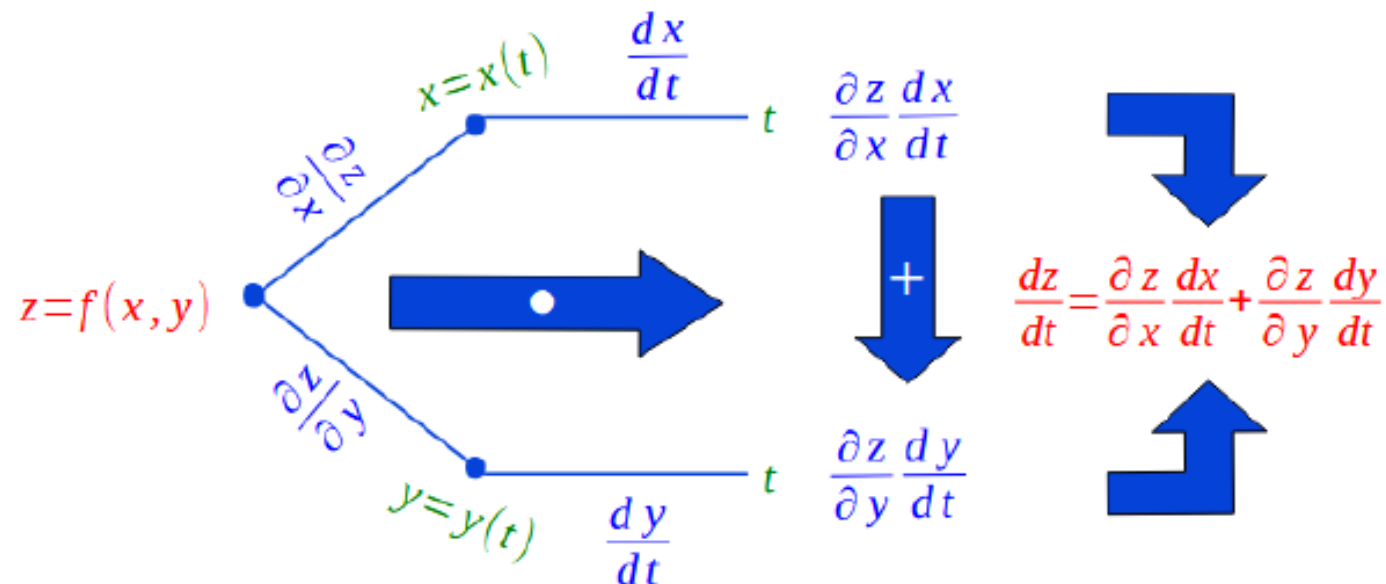
$$z = f(x) = f(g(t)) \text{ und } x = g(t)$$

$$\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{z'(t)} = \underbrace{\frac{dz}{dg}}_{z'(g)} \underbrace{\frac{dg}{dt}}_{g'(t)}$$

3. Mathematische Ableitungsakrobatik: Kettenregel - Differenziationsregeln für Multivariable Funktionen

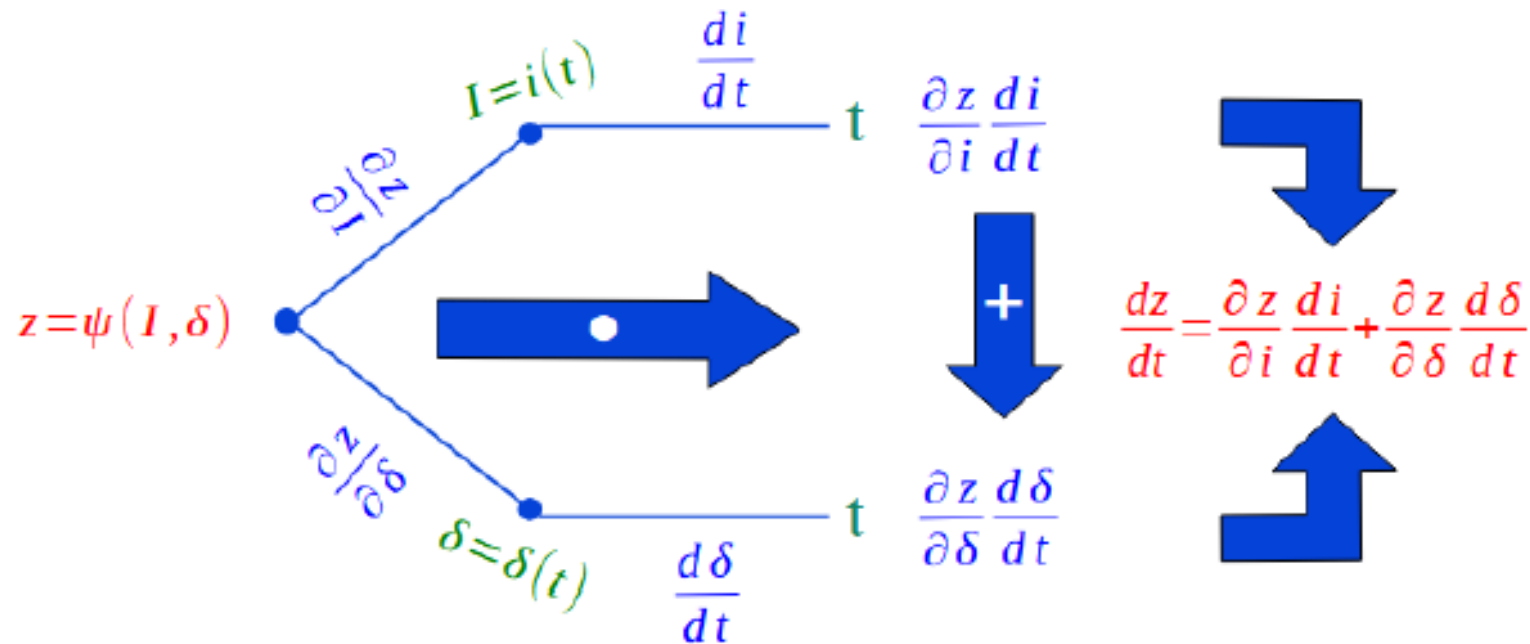
Geschachtelte Funktionen in der Lagrange-Notation – Baumdiagramm für eine (1) unabhängige Variable:

$$z = f(x) = f(g(t)) \text{ und } x = g(t)$$



3. Mathematische Ableitungsakrobatik: Kettenregel - Differenziationsregeln für Multivariable Funktionen

Geschachtelte Funktionen in der Lagrange-Notation – Baumdiagramm für eine (1) unabhängige Variable;
Induktionsgesetz: $z = \Psi(I, \delta)$, mit $I = i(t)$ und $\delta = \delta(t)$:



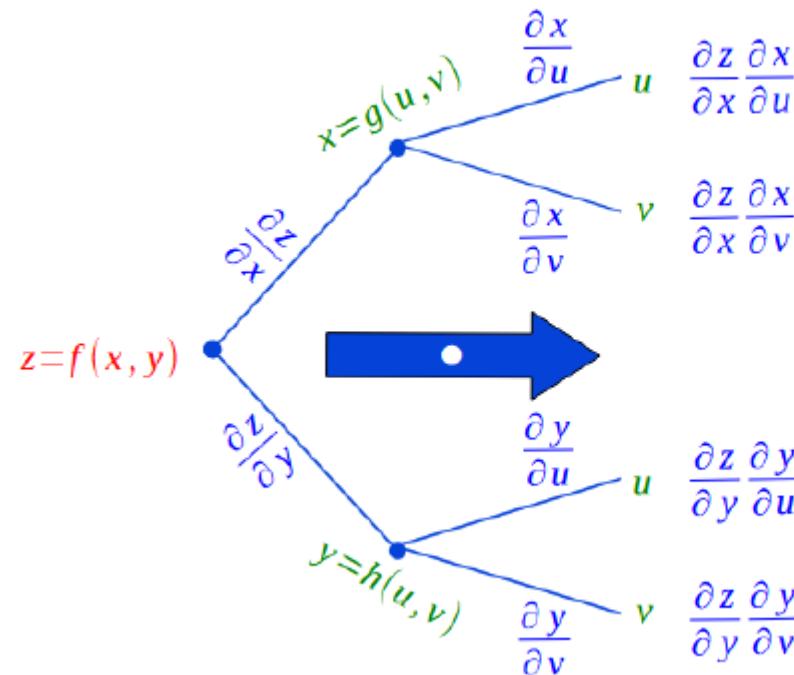
3. Mathematische Ableitungsakrobatik: Kettenregel - Differenziationsregeln für Multivariable Funktionen

Geschachtelte Funktionen in der Lagrange-Notation – Baumdiagramm für zwei (2) unabhängige Variablen:

$$x = g(u, v) \text{ und } y = h(u, v)$$

$$z = f(x, y)$$

$$z = f(g(u, v), h(u, v))$$



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

3. Mathematische Ableitungsakrobatik: Kettenregel - Differenziationsregeln für Multivariable Funktionen

Unterschied beider Kettenregeln:

In der Kettenregel für *eine unabhängige Variable* ist die linke Seite der Gleichung für die Ableitung eine gewöhnliche Ableitung.

Dagegen in der Kettenregel für *zwei unabhängige Variablen* eine partielle Ableitung. Der Grund dafür ist, dass in der Kettenregel für eine unabhängige Variable z letztendlich nur eine Funktion von t ist, während z in der Kettenregel für zwei unabhängige Variablen eine Funktion von u als auch von v ist.

Inhaltsverzeichnis

1. Historie zur Variationsrechnung
2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung
3. Mathematische Ableitungsakrobatik
- 4. Euler-Lagrange-Gleichung**
5. Anwendungsbeispiele

4. Euler-Lagrange-Gleichung

Prüfung auf Minimum/Maximum:

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0,$$

Extremal I:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y, y'] dx$$

Funktionen:

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon \eta(x),$$

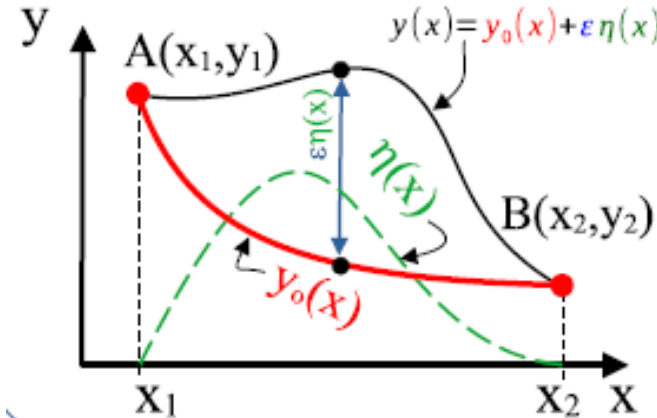
$$y'(x) = y'_0(x) + \varepsilon \eta'(x)$$

Extremal:

$$F[x, y_0(x) + \varepsilon \eta(x), y'_0(x) + \varepsilon \eta'(x)]$$

Randbedingungen:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$



$y_0(x)$ = Lösung od. Extremal
 $\eta(x)$ = frei gewählter Pfad
 ε = Skalierungsfaktor
 $\varepsilon \eta(x)$ = Variation von y
 $y(x)$ = Funkt. d. Grundfunkt
 A, B = Randbedingungen

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x)] dx = 0$$

Anwendung der Leibniz-Regel:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{x_1}^{x_2} \left. \frac{d}{d\varepsilon} (F[x, y(x), y'(x)]) \right|_{\varepsilon=0} dx = 0 \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \underbrace{\frac{dx}{d\varepsilon}}_{=0} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{d\varepsilon} \right) \bigg|_{\varepsilon=0} dx = 0. \end{aligned}$$

4. Euler-Lagrange-Gleichung

Zwischenschritt:

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x1}^{x2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) \Big|_{\varepsilon=0} dx = 0.$$

Schwache Form

$$\int_{x1}^{x2} \left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y} \eta}_{Term1} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'} \eta'}_{Term2} \right) dx = 0$$

2'ter Term

$$\int_{x1}^{x2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'} \eta}_{=0} \Big|_{x=x1}^{x=x2} - \int_{x1}^{x2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx.$$

...wird wann Null??

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x1}^{x2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0.$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

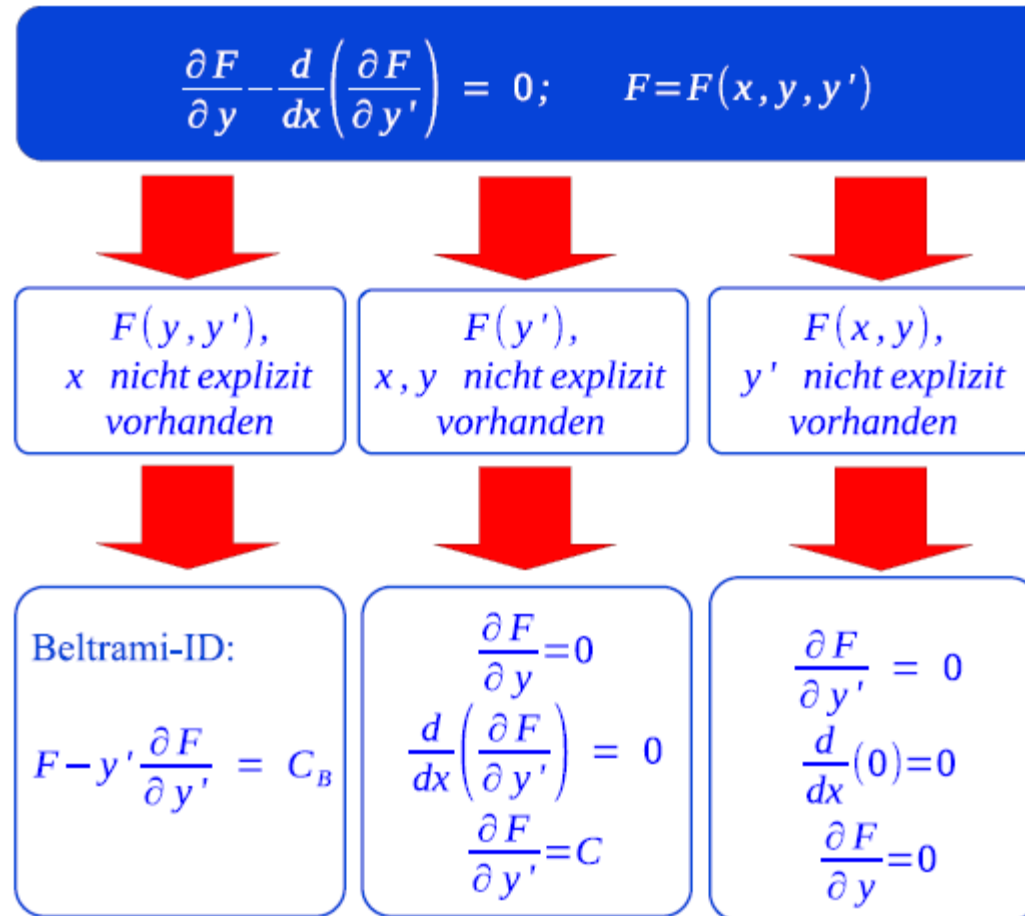
„Scientific Poem“ Sir Hamilton

Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) = 0.$$

...dabei werden x, y, y' durch t, q, dq/dt ersetzt.

4. Euler-Lagrange-Gleichung: Lösungshinweise

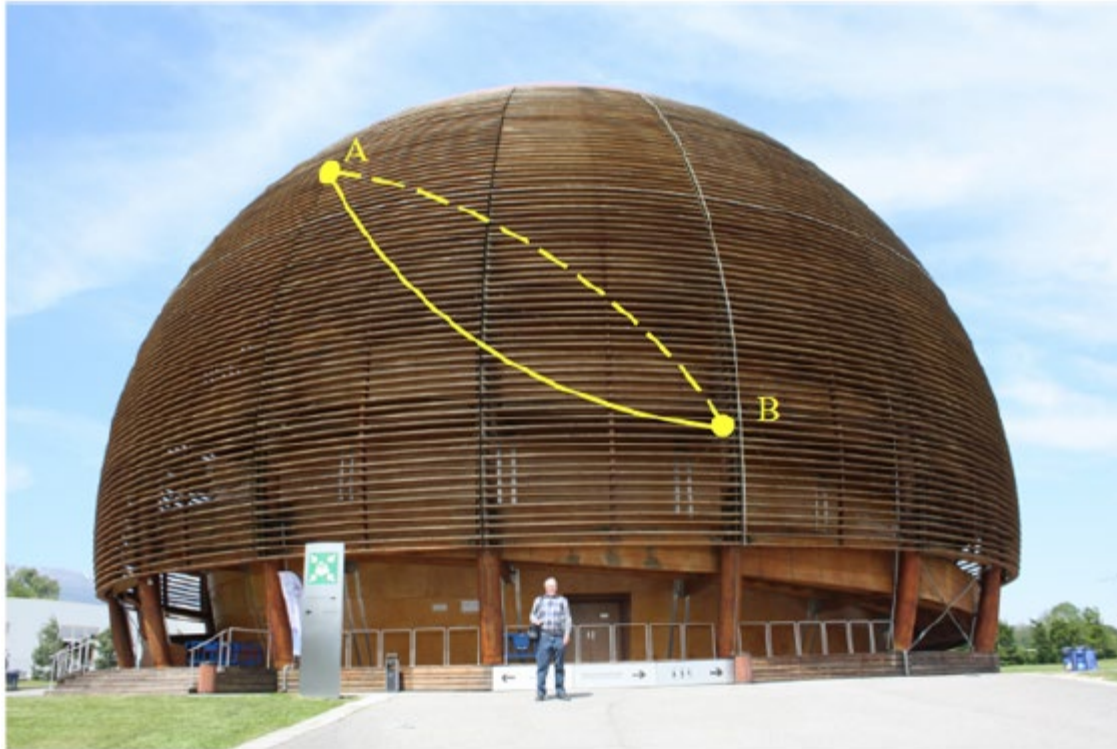


Inhaltsverzeichnis

1. Historie zur Variationsrechnung
2. Einführung in die Gedanken der Methode der Variationsrechnung
3. Mathematische Ableitungsakrobatik
4. Euler-Lagrange-Gleichung
- 5. Anwendungsbeispiele**

5. Anwendungsbeispiele - Geodäte

Beispiel:



Linienelement:

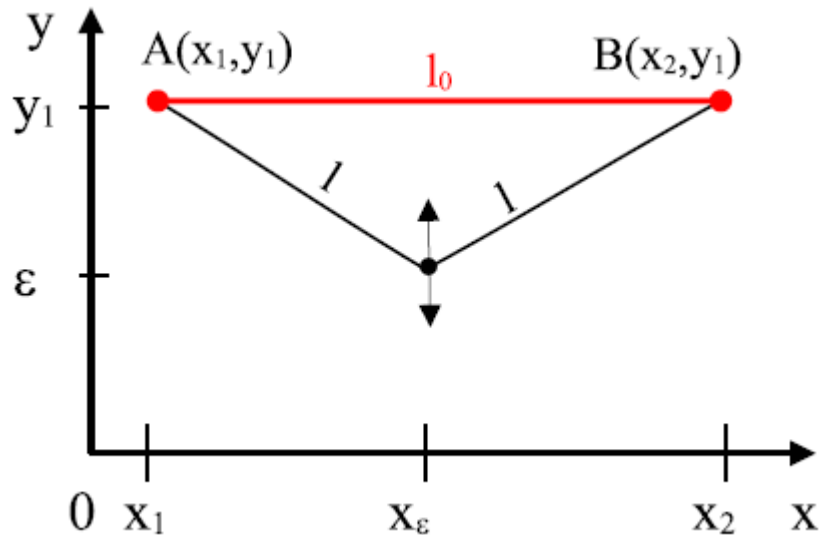
$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\
 ds &= F(y') dx = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx \\
 &= \sqrt{1 + y'^2} dx; \quad I = \int_A^B ds \\
 I &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx; \quad [m]
 \end{aligned}$$

Extremal:

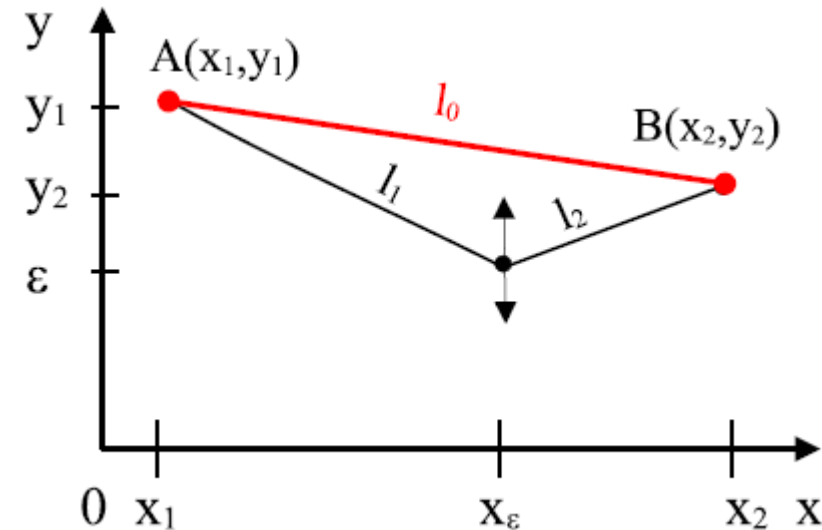
$$\begin{aligned}
 L &= \int_{x_1}^{x_2} ds = \text{Extrem} = \text{Minimum} \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1 + y(x)^2}}_F dx.
 \end{aligned}$$

5. Anwendungsbeispiele - Geodäte

Beispiele:



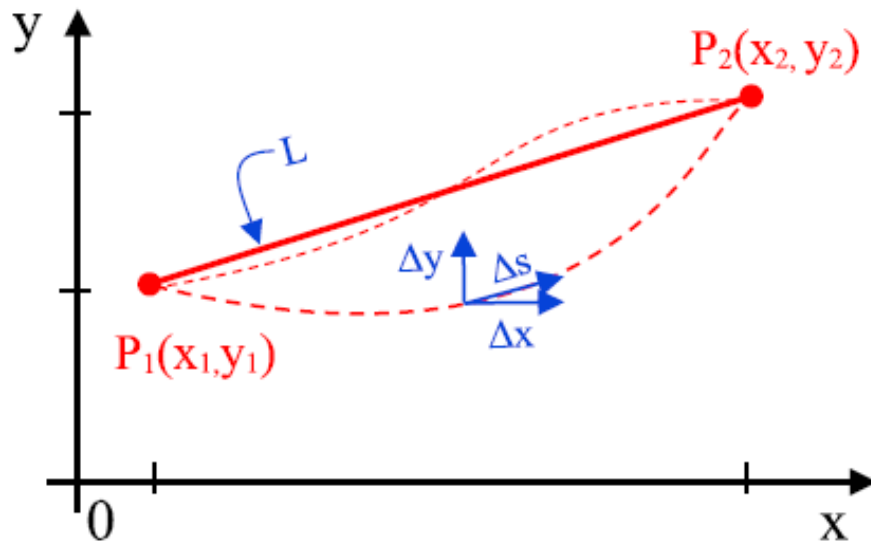
$$L = 2 (x_2 - x_\varepsilon) \sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - \varepsilon}{(x_2 - x_\varepsilon)} \right)^2} = \text{Extrem} = \text{Minimum}.$$



$$\begin{aligned} l &= l_1 + l_2 \\ &= \sqrt{(x_\varepsilon - x_1)^2 + (y_1 - \varepsilon)^2} + \sqrt{(x_2 - x_\varepsilon)^2 + (y_2 - \varepsilon)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - \varepsilon}{x_\varepsilon - x_1} \right)^2} (x_\varepsilon - x_1) + \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - \varepsilon}{x_2 - x_\varepsilon} \right)^2} (x_\varepsilon - x_2) \\ &= \text{Extremum} = \text{Minimum}. \end{aligned}$$

5. Anwendungsbeispiele - Geodäte

Beispiel:



$$\begin{aligned}
 L &= \int_{x_1}^{x_2} ds = \text{Extrem} = \text{Minimum} \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1 + y(x)^2}}_F dx.
 \end{aligned}$$

Lösungsvorgehen: $F=F(y')$

$$\frac{\partial F}{\partial y(x)'} = \frac{\partial}{\partial y(x)'} (1 + y(x)^2)^{1/2} = \frac{y(x)'}{(1 + y(x)^2)^{1/2}} = m.$$

Umformen...

$$\begin{aligned}
 y(x)' &= m (1 + y(x)^2)^{1/2} \\
 y(x)^2 &= m^2 + m^2 y(x)^2 \\
 y(x)' &= \frac{dy(x)}{dx} = \sqrt{\frac{m^2}{1 - m^2}} = M = \text{const.}
 \end{aligned}$$

und in Extremal einsetzen folgt

$$L = \int_{x_1}^{x_2} M dx = M x \Big|_{x_1}^{x_2}$$

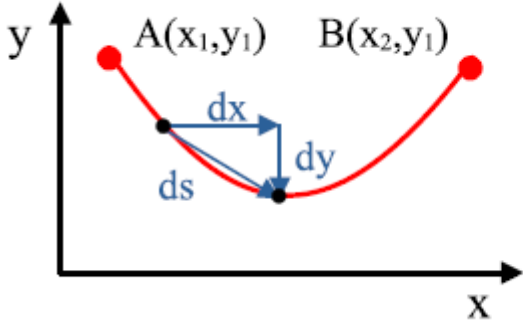
die Gleichung einer Geraden.

5. Anwendungsbeispiele - Katenoid

Beispiel:



Linienelement:



$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\
 ds &= \sqrt{1 + y'^2} \, dx \\
 I &= g \rho A \int_A^B y \, ds; [J] \\
 &= g \rho A \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx \\
 &= g \rho A \int_{x_1}^{x_2} F(y, y') \, dx
 \end{aligned}$$

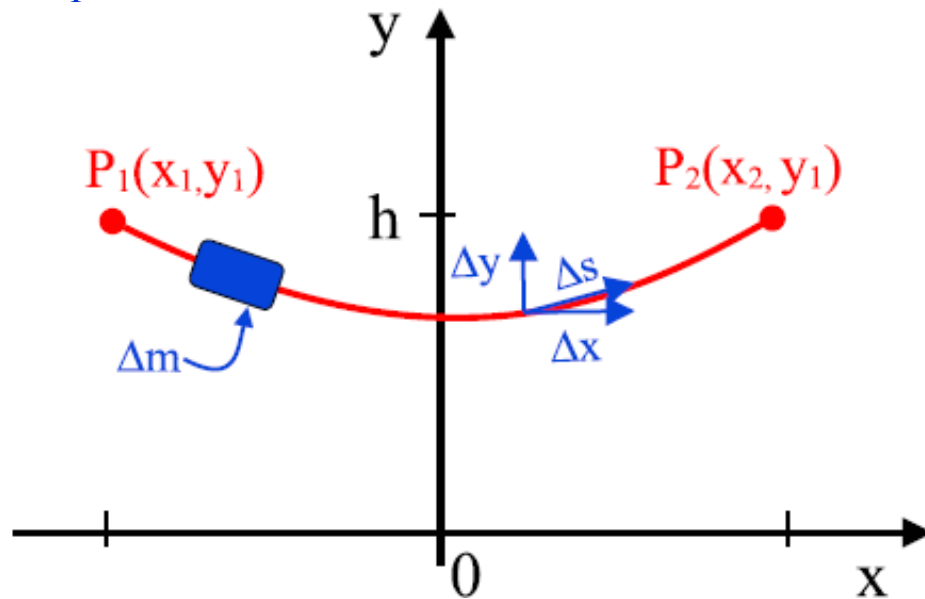
Extremal:

$$W_{pot} = m g h = \text{Extrem} = \text{Minimum}.$$

$$\begin{aligned}
 \Delta W_{pot} &= \rho A g y \Delta s \\
 W_{pot} &= \rho A g \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{y \sqrt{1 + y'^2}}_{F(y, y')} \, dx
 \end{aligned}$$

5. Anwendungsbeispiele - Katenoid

Beispiel:



$$F(y, y') = y \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} y (1 + y'^2)^{1/2} = \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

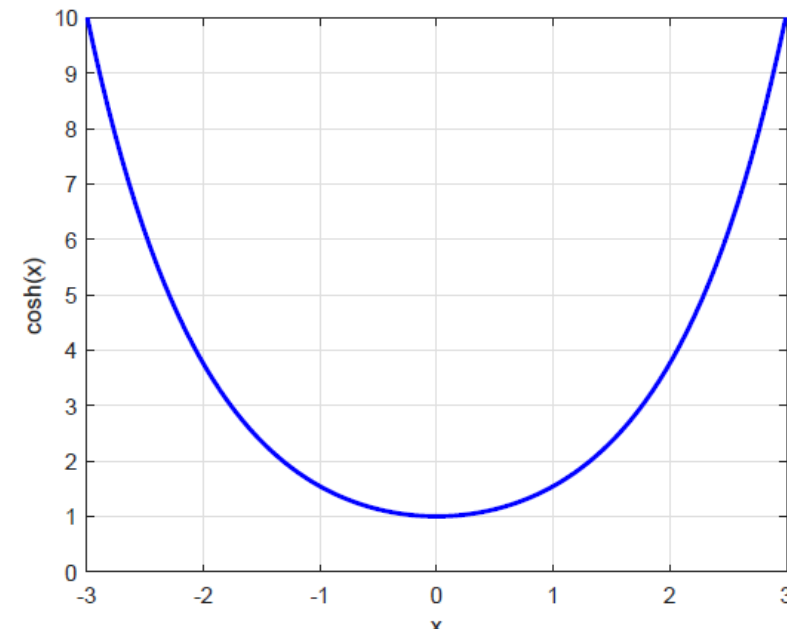
$$y \sqrt{1 + y'^2} - \frac{y y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_B.$$

Lösung:

$$dx = C_B \frac{dy}{\sqrt{y^2 - C_B^2}}$$

$$x = C_B \ln \left(y + \sqrt{y^2 - C_B^2} \right) + D = C_B \operatorname{acosh}(y) + D,$$

$$y(x) = \cosh \left(\frac{x - D}{C_B} \right)$$



5. Anwendungsbeispiele - Minimalfläche

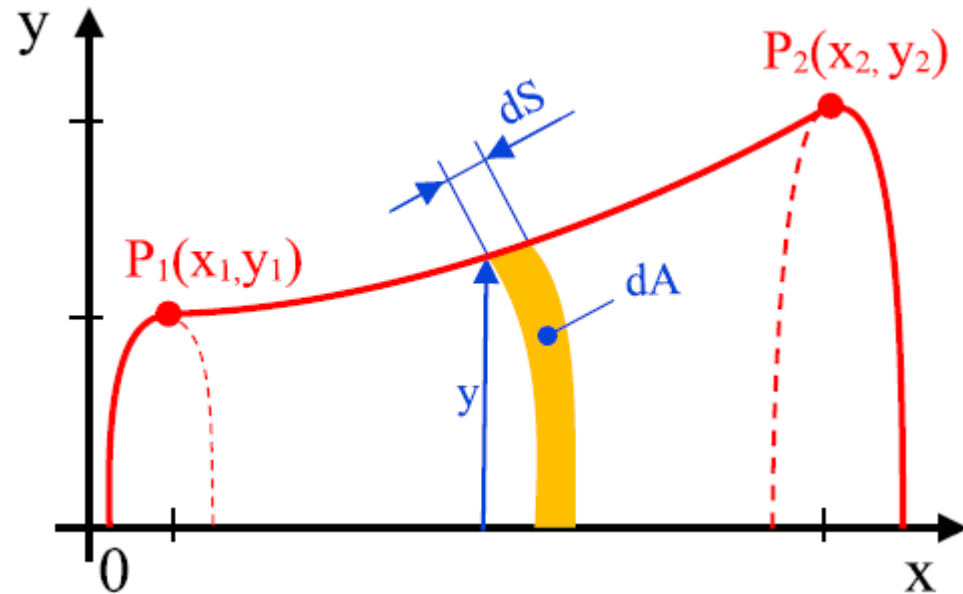


Linienelement:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\
 ds &= \sqrt{1 + y'^2} \, dx \\
 I &= \int_A^B 2 \pi y \, ds; \quad [m^2] \\
 &= 2 \pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx \\
 &= 2 \pi \int_{x_1}^{x_2} F(y, y') \, dx
 \end{aligned}$$

5. Anwendungsbeispiele - Minimalfläche

Beispiel:



$$dA = 2 \pi y ds = 2 \pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2 \pi y \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}_{=1} dx,$$

$$I = 2 \pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx = \text{Extrem} = \text{Minimum}$$

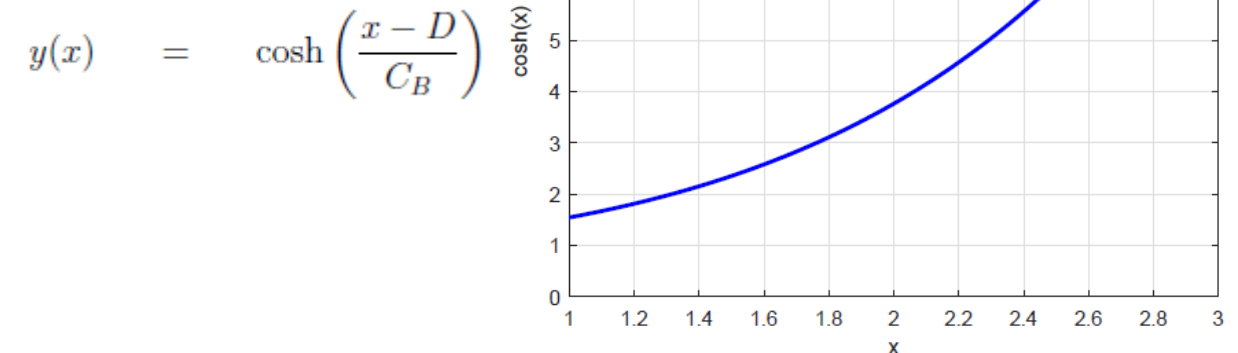
Lösung:

$$F(y, y') = y \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} y (1 + y'^2)^{1/2} = \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

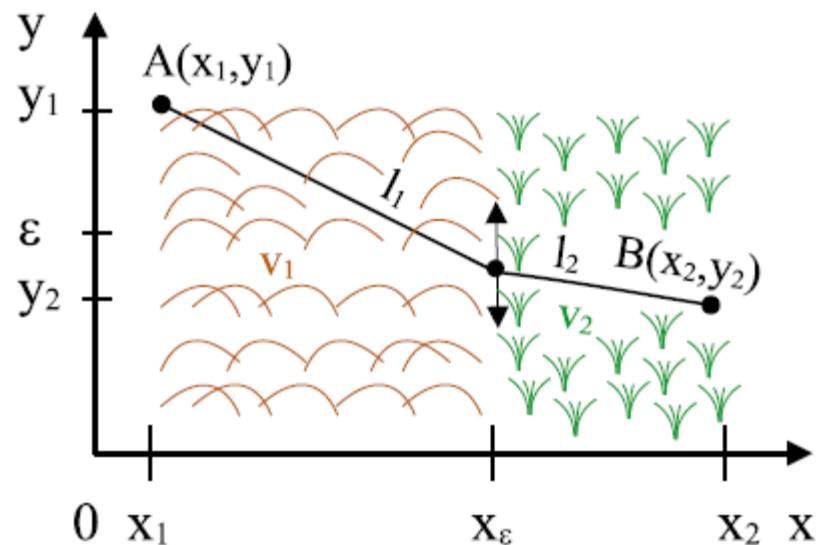
$$dx = C_B \frac{dy}{\sqrt{y^2 - C_B^2}}$$

$$x = C_B \ln \left(y + \sqrt{y^2 - C_B^2} \right) + D = C_B \operatorname{acosh}(y) + D,$$



5. Anwendungsbeispiele – Brachistochrone/Tautochrone

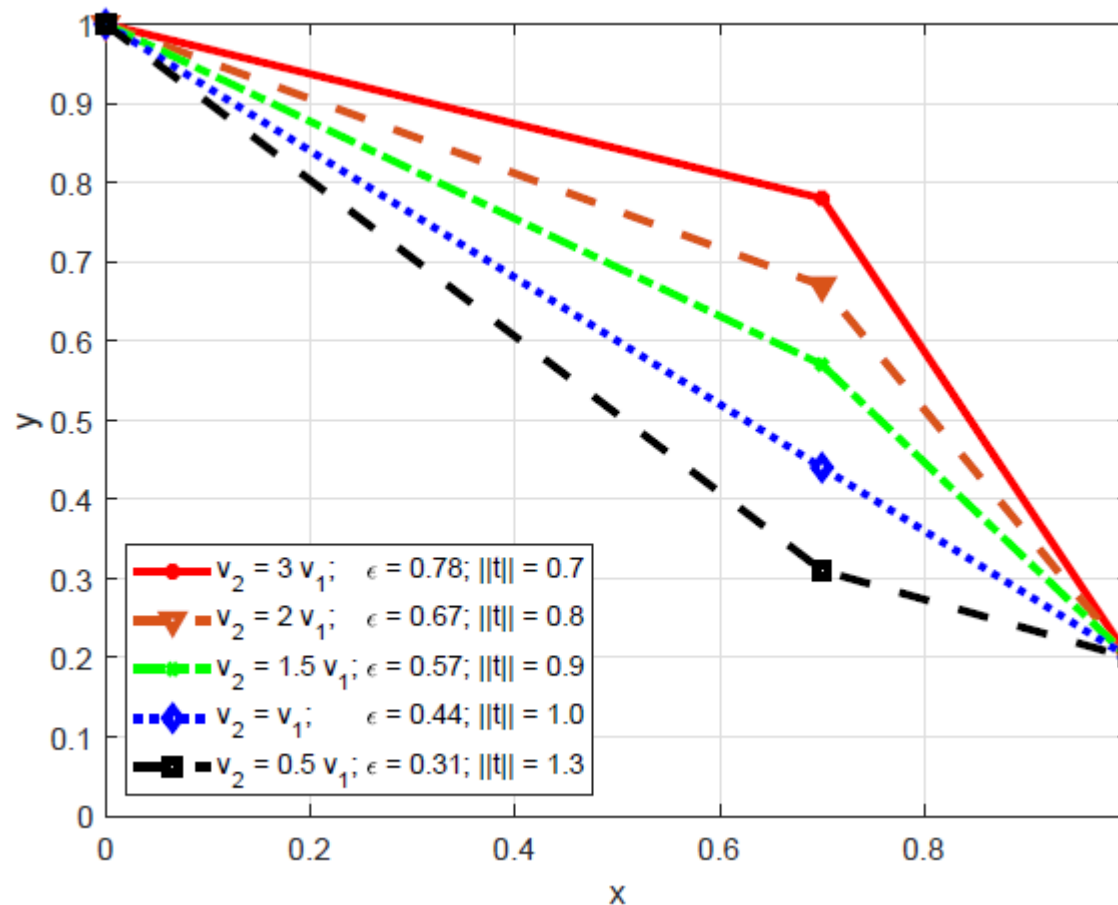
Beispiel:



$$t = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - \varepsilon}{x_\varepsilon - x_1}\right)^2} (x_\varepsilon - x_1)}{v_1} + \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon - y_2}{x_2 - x_\varepsilon}\right)^2} (x_2 - x_\varepsilon)}{v_2}$$

$$= \text{Extremum} = \text{Minimum.}$$

Ergebnis:

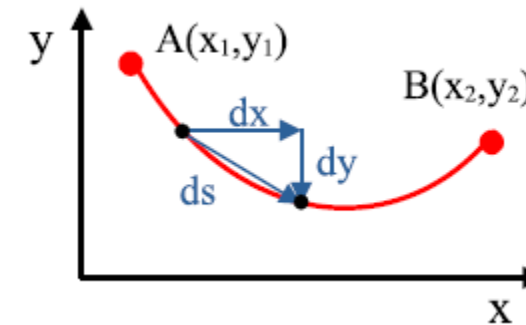


5. Anwendungsbeispiele – Brachistochrone/Tautochrone

Beispiel:



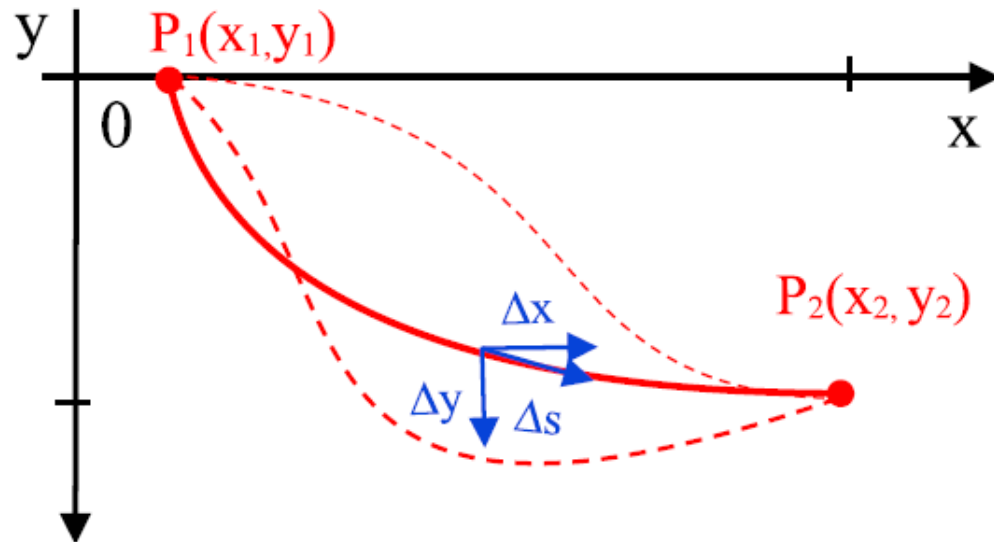
Linienelement:



$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\
 ds &= \sqrt{1 + y'^2} \, dx \\
 I &= \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y') \, dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} \, dx
 \end{aligned}$$

5. Anwendungsbeispiele – Brachistochrone/Tautochrone

Beispiel:



$$\begin{aligned}
 W_{pot} &= W_{kin} & v &= \sqrt{2 g y} \\
 m g y &= \frac{1}{2} m v^2 \\
 \Delta s &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \\
 ds &= \sqrt{1 + y'^2} dx
 \end{aligned}$$

$$dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2 g y}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx = \text{Extrem} = \text{Minimum}$$

Mit Beltrami folgt

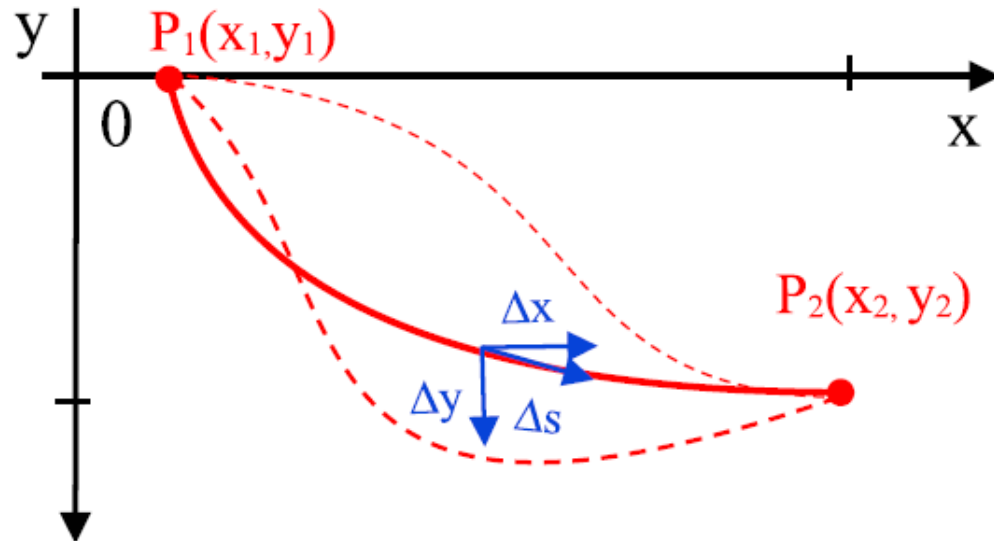
$$F = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{y \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}}$$

$$\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} - \frac{y'}{y \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}} = C_B$$

5. Anwendungsbeispiele – Brachistochrone/Tautochrone

Beispiel:



Fortsetzung:

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{y'}{y\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}} = C_B$$

...

$$\frac{1}{C_B} = y \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

Isoliere y'

$$\begin{aligned} \frac{1}{y C_B^2} &= 1 + y'^2 \\ \frac{1}{y C_B^2} - 1 &= y'^2 \end{aligned}$$

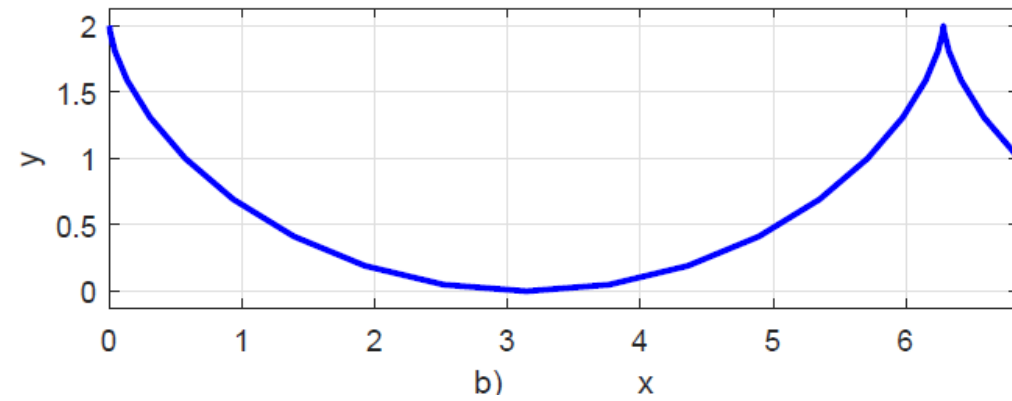
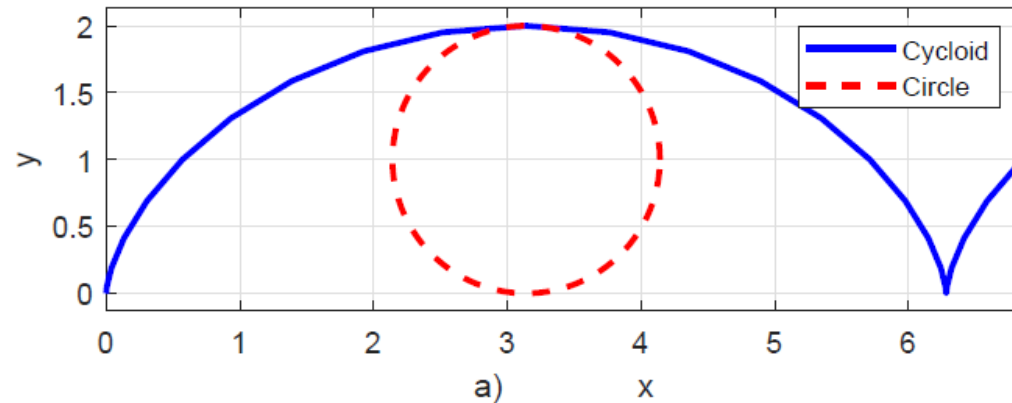
sowie die Integration von

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{y C_B^2} - 1} &= y' = \frac{dy}{dx} \\ dx &= \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y C_B^2} - 1}} \end{aligned}$$

führt auf die Zykloide!

5. Anwendungsbeispiele – Brachistochrone/Tautochrone

Lösung Zyklode:

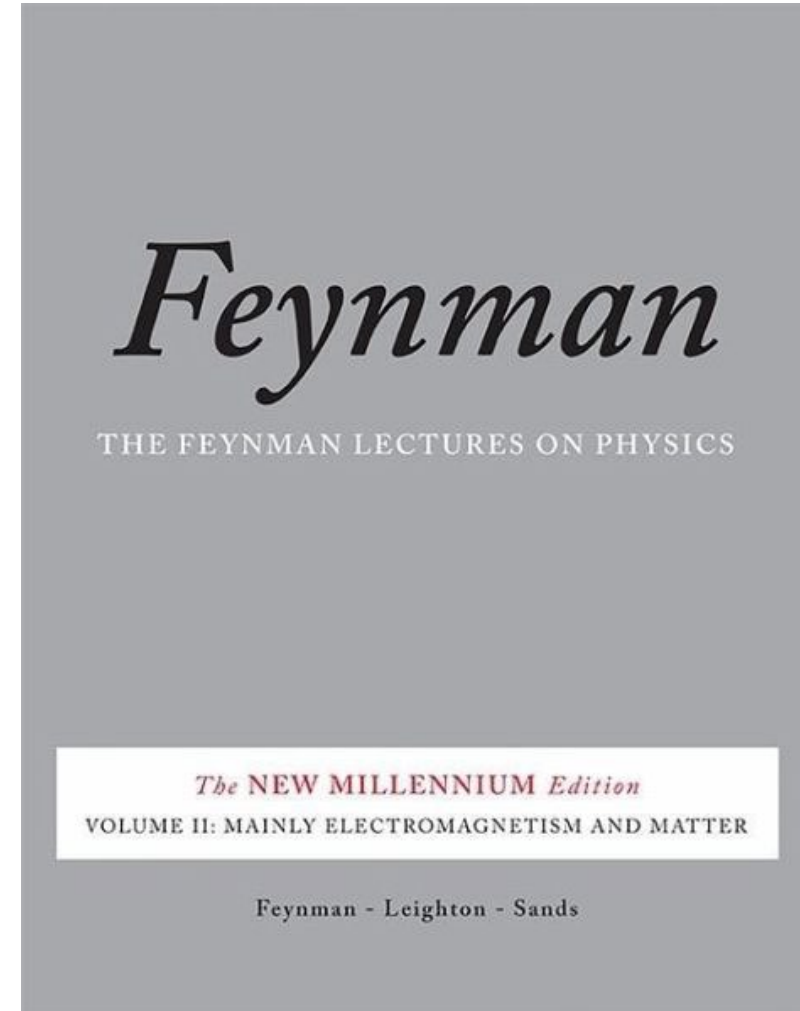
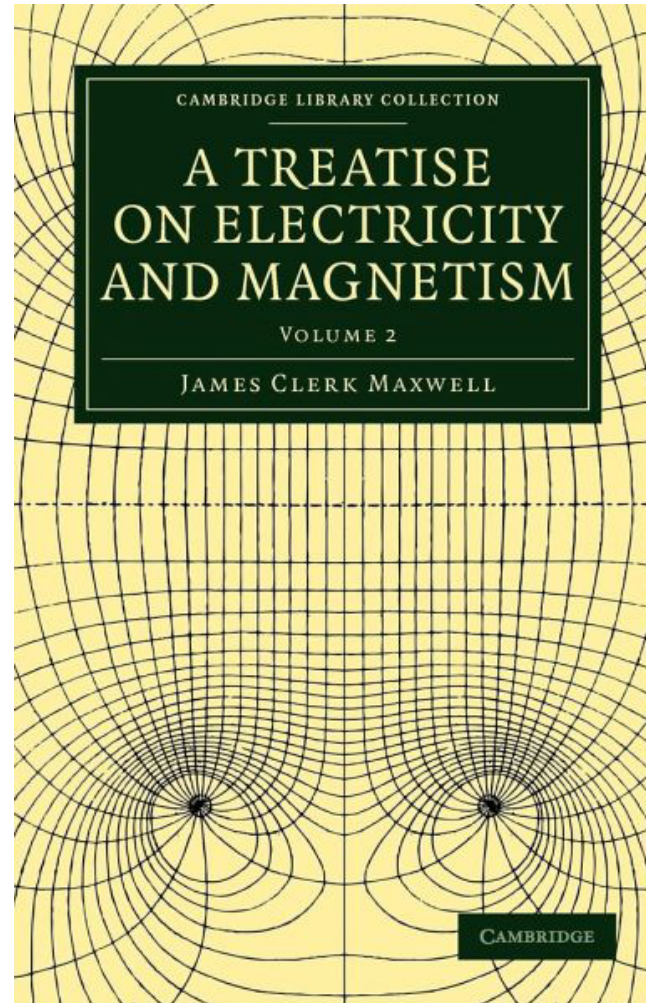
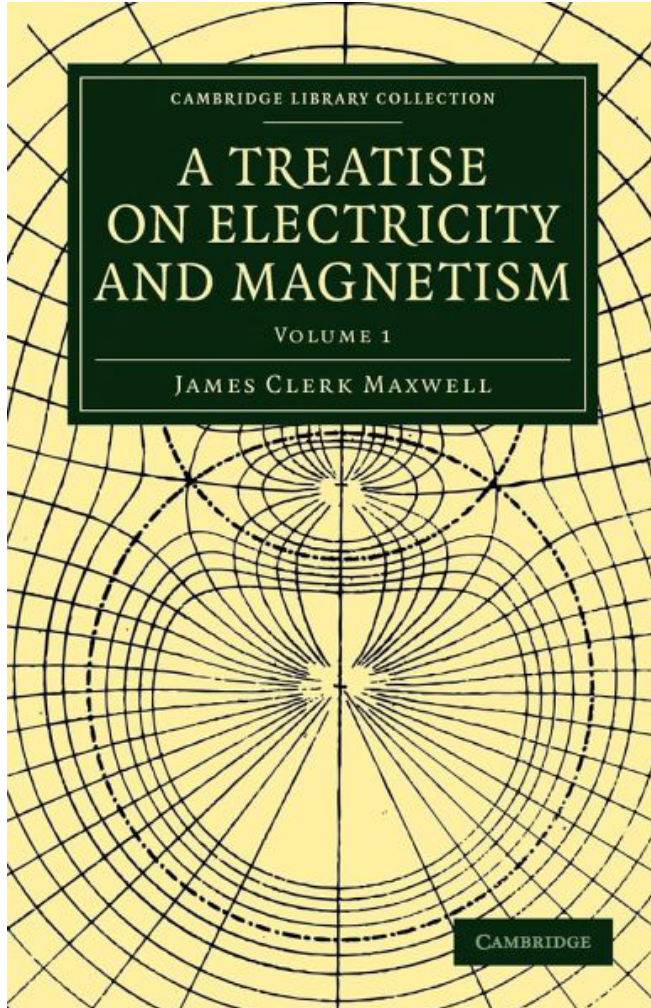


Zykloide in parametrischer Darstellung:

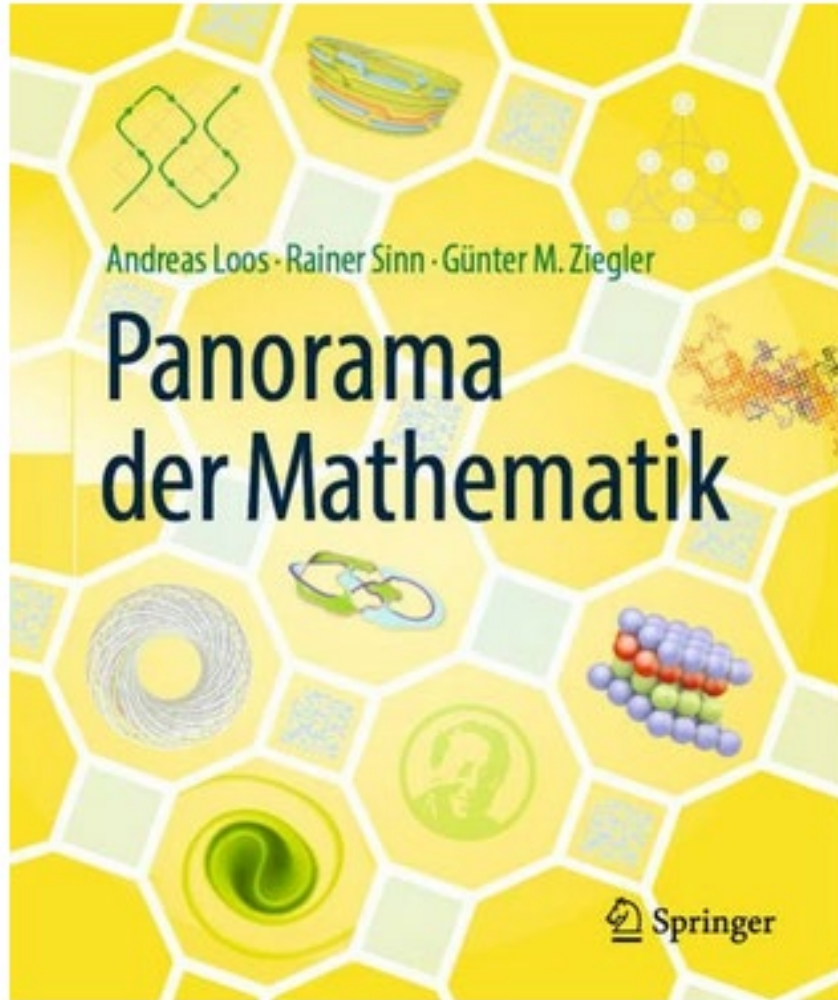
$$x = r\alpha - r \sin \alpha = r (\alpha - \sin \alpha).$$

$$y = r - r \cos \alpha = r (1 - \cos \alpha).$$

Literaturempfehlung:



Literaturempfehlung:

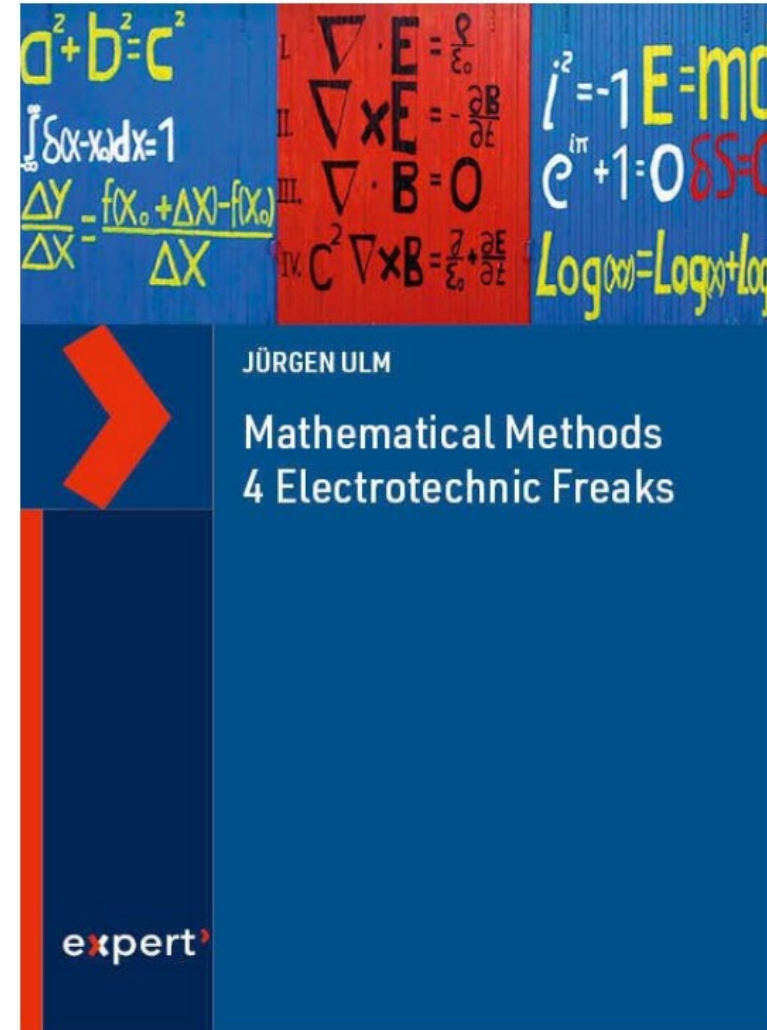


Für Mathematik-Interessierte und für diejenigen, welche wissen möchten, wie Mathematik entstanden ist, wozu sie dem Menschen von Nutzen ist und damit im Alltag nicht mehr wegzudenken ist.

Sehr lehrreiche, populärwissenschaftliche Literatur!!

<https://www.spektrum.de/rezension/buchkritik-zu-panorama-der-mathematik/2070207>

Literaturempfehlung:



Programm Wintersemester 2025/26:

Mittwoch, 05. November 2025
16.30 bis 18.00 Uhr

Mathematische Grundlagen, Maxwellgleichungen, magnetisches und permanentmagnetisches. Geklärt wird zudem die Frage:
„Was haben ein Festtagsbraten und ein Elektromagnet gemeinsam?“

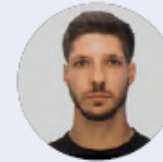


Prof. Dr.-Ing. Jürgen Ulm
Hochschule Heilbronn, Campus Künzelsau,
Reinhold-Würth-Hochschule

Schwerpunktgebiet in der Theorie der elektromagnetischen Felder und der elektromagneto-mechanischen Wandler im Master-schwerpunkt Elektromagnetische Systeme (EMS).

Mittwoch, 12. November 2025
16.30 bis 18.00 Uhr

Optimierungsworkflow mit Motor-CAD und optiSLang



Florian Servas
Studium der Elektrotechnik Campus Künzelsau,
Reinhold-Würth-Hochschule

Im Rahmen seiner Bachelorarbeit beschäftigte er sich mit der Motoroptimierung und der Konzeptentwicklung für Hocheffizienzmotoren bei der ZIEHL-ABEGG SE. Aktuell führt er sein Elektrotechnikstudium im Master fort.

Mittwoch, 17. Dezember 2025
16.30 bis 18.00 Uhr

Einführung in die Variationsrechnung – wie lösen wir das 17.30 Uhr-Problem?



Prof. Dr.-Ing. Jürgen Ulm
Hochschule Heilbronn, Campus Künzelsau,
Reinhold-Würth-Hochschule

Schwerpunktgebiet in der Theorie der elektromagnetischen Felder und der elektromagneto-mechanischen Wandler im Master-schwerpunkt Elektromagnetische Systeme (EMS).

Mittwoch, 07. Januar 2026
16.30 bis 18.00 Uhr

Fortsetzung Variationsmethode – mit mathematischer Beschleunigung



Prof. Dr.-Ing. Jürgen Ulm
Hochschule Heilbronn, Campus Künzelsau,
Reinhold-Würth-Hochschule

Schwerpunktgebiet in der Theorie der elektromagnetischen Felder und der elektromagneto-mechanischen Wandler im Master-schwerpunkt Elektromagnetische Systeme (EMS).

Magnetics 4 Freaks: Alles rund um den Elektromagnetismus WS25/26



Bitte



Danke!

Willkommen an der
Reinhold-Würth-
Hochschule in
Künzelsau

Die Kolloquiumsreihe
von Institut
und Industrie

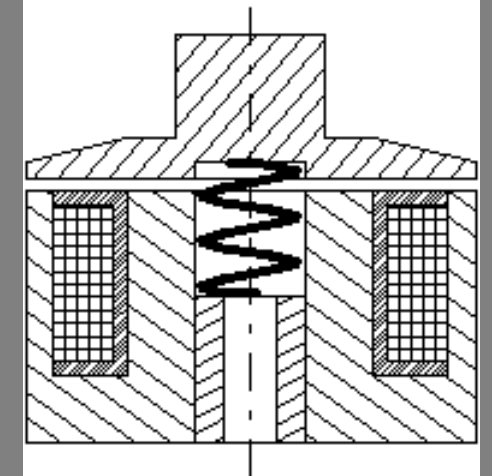


Foto: Wilhelm Feucht

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Ulm
Institut für schnelle mechatronische Systeme (ISM)
Institut für Digitalisierung und elektrische Antriebe (IDA)